



ANNEE 2006-2007
CONCOURS D'ENTREE A L'YFAMAU
SESSION DE MAI 2007

FILIERE : ARCHITECTURE-URBANISME

EPREUVE ECRITE

Matière : MATHÉMATIQUE

Durée : 2 Heures

Pour cette épreuve, le candidat est autorisé à utiliser une calculatrice scientifique non programmable

Exercice 1 : (7pts)

A-

- 1- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z + \frac{1}{\cos 2} = 0$ où 1 est un réel donné appartenant à $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$
- 2- Soient z_1 et z_2 les deux solutions. Donner suivant les valeurs de 1 le module et un argument de z_1 et z_2 .
- 3- Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . On suppose désormais que 1 appartient à $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

Déterminer les ensembles images de z_1 et de z_2 .

B-

- 1- Calculer $\cos 5q$ en fonction de $\cos q$. En déduire la valeur de $\cos \frac{11\pi}{10}$.
- 2- Montrer que $\sin 5q = \sin q Q(\cos q)$ où Q est un polynôme de degré 4 que l'on déterminera.
- 3- Calculer $\tan 5q$ en fonction de $\tan q$ (supposés ces quantités sont définies).

Exercice 2 : (7pts)

Soit f la fonction réelle définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x}$

- 1- a- Montrer que la fonction f est strictement croissante.
 b- En déduire que, pour tout entier naturel n , $\frac{e^n}{n} \leq \int_1^n f(t)dt \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$
- 2- Montrer que l'équation $f(x) = \int_1^x f(t)dt$ admet une solution unique dans l'intervalle $[n, n+1]$

On note U_n cette solution, ce qui définit une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 3- a- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n} = 1$
 b- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\int_1^{U_n} \frac{e^t}{t^2} dt}{\int_1^{U_n} \frac{e^t}{t} dt} \right] = 0$



- 4- A l'aide d'une intégration par partie de $\int_1^{U_n} \frac{e^t}{t^2} dt$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - n) = \ln(e-1)$

Exercice 3 : (6pts)

Soit Γ la courbe d'équation $y = x^{-\alpha}$ où l'on suppose $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$

La tangente en $M(x_0, y_0)$ de la courbe coupe les axes de coordonnées ox et oy respectivement en P et Q .

- 1) Calculer les coordonnées de P et Q en fonction de x_0 .
- 2) Montrer que M est le barycentre des points P et Q affectés des coefficients que l'on précisera.
- 3) Préciser la position de M lorsque $\alpha = -1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$.
- 4) Trouver l'ensemble Γ' décrit par le milieu M' du segment $[P, Q]$.

Construire les ensembles Γ' et Γ'' lorsque $\alpha = -1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$, en faisant figurer les points M , Q , P .